Μαθημα 10ο 13/11/2017

Διαφ. Εξισωσεις

$y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ Προβλημα Cauchy (Εξισωση με λυση)

1) θελω f συνεχης } Απο αυτα βγαζουμε οτι υπαρχει
2) k - Lipschitz μια λυση (θεωρ. υπαρξης και μοναδικοτητα)

//

• Δυο βαθμωτες εξισωσεις

$y_1' = f_1(t, y_1, y_2)$

$y_2' = f_2(t, y_1, y_2)$

} Δεν ειναι στην υλη αλλα εκανε μια αναφορα

Μπορει να γραφει ως εξης

$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ και αρα $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$

$\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y})$

Αρχικη συνθηκη $\vec{y}(t_0) = \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} = \vec{y}_0$ (οπως Απει 3)

Η συνθηκη Lipschitz στο $\mathbb{R}^2$ θα γινει με τις νορμες παιρνει τιμες $\vec{f} : (t, \vec{y}) \in I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\| \vec{f}(t, \vec{y}_1) - \vec{f}(t, \vec{y}_2) \| \leq k \| \vec{y}_1 - \vec{y}_2 \|$ //

Εφαρμογη (Υπαρξη και Μοναδικοτητα)

$y'(t) + p(t) y(t) = q(t)$, $y(t_0) = y_0$ $t \in I$, $t_0 \in I$, $p, q \in C(I)$

$y' = -py + q$ δηλ. η f θα ειναι $f(t,y) = -py + q$

Επειδη $p, q \in C(I)$ τοτε και η f συνεχης με

$f(t,y) : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Αρα ικανοποιει τη πρωτη συνθηκη

$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t) \right| = |-p(t)|$

αν υπαρχει συμπαγες υποδιαστημα I τοτε $|p(t)| \leq k_j$ φραγμενη στο I

Αρα η συναρτηση ειναι k_j-Lipschitz σε καθε συμπαγες υποδιαστημα του I (ικανοποιει το Θεωρ. 3)

→ Οι γραμμικες εξισωσεις εχουν λυσεις σε ολο το πεδιο ορισμου τους και ειναι μοναδικες.

Γραμμικη διαφορικη εξισωση $n^{οστης}$ ταξης

$$(E): a_n(t)\, y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b(t), \quad t \in I$$

$a_i, b \; (i=0,1,\dots,n) \in C(I)$
$a_n(t) \neq 0, \quad t \in I$

Αν $b(t)=0$ τοτε συμβολιζεται με (E_0) και ονομαζεται γραμμικη διαφορικη εξισωση n-ταξης

Αν $b(t) \neq 0$ τοτε λεγεται μη ομογενης γραμμ. δ.ε

$a_0, a_1, \dots, a_n$: σταθερες συναρτησεις τοτε λεγεται γραμμ. δ.ε με σταθερους συντελεστες

π.χ

$$2y''' + 3y'' - 2y' + 4y = b(t)$$

μη ομογενης γραμμικη δ.ε με σταθερους συντελεστες

Π.Α.Τ:

(C) : $y(t_0) = c_0,\ y'(t_0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$

Θεώρημα 1 (σελ 61)

Ας είναι a_i, b $(i=0,1,\dots,n)$ συνεχείς συναρτήσεις. Τότε για κάθε $t_0 \in I$ και για οποιοδήποτε $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ το ΠΑΤ (E)-(C) έχει ακριβώς μια λύση στο I

→ λύση → Εξίσωση: οι συναρτήσεις y οι οποίες είναι n φορές παραγωγίσιμες στο διάστημα I και είτε ικανοποιούν την εξίσωση στο I είτε

→ λύση → Π.Α.Τ: για το ΠΑΤ ικανοποιεί την (E) και (C_0) στο I

Υπενθύμιση

1. Επίλυση γραμμικών συστημάτων

$$D'(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}' =$$

$$= \begin{vmatrix} f'_{11}(t) & \dots & f'_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & \dots & f_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ f'_{21}(t) & \dots & f'_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & \dots & f_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f'_{n1}(t) & \dots & f'_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

2. Ας είναι $f_1, \ldots, f_n$ συναρτήσεις ορισμένες σε ένα σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι οι $f_1, \ldots, f_n$ είναι γραμ. εξαρτημένες στο $A \subseteq E$ αν $\exists\, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ με $|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n| \neq 0$ με $c_1 f_1(t) + \ldots + c_n f_n(t) = 0$, $t \in I$

3. Αν $f_1, \ldots, f_n$ δεν είναι γραμ. εξαρτημένες τότε λέμε ότι $f_1, \ldots, f_n$ είναι γραμ. ανεξάρτητες στο A

Παράδειγμα

$f_1(x) = x$ $\quad E = \mathbb{R}$

$f_2(x) = |x|$

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

$c_1 x + c_2 |x| = 0$

για $x = 1$: $c_1 + c_2 = 0$

για $x = -1$: $-c_1 + c_2 = 0$

$\Rightarrow c_1 = c_2$ άρα f_1, f_2 γραμ. ανεξ. στο $\mathbb{R}$

Παράδειγμα

$f_1(x) = x$ $\quad E = \mathbb{R}$

$f_2(x) = |x|$

παίρνουμε τώρα $x \leq -3$

$1 \cdot f_1(x) + 1 \cdot f_2(x) = 0$

$x + (-x) = 0 \quad \forall x \in E$

Άρα f_1, f_2 όχι γραμ. ανεξ.

Ασκηση 2 (iv)

$f_1(x) = x^2 - x + 3$

$f_2(x) = 2x^2 + x$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

$f_3(x) = 2x - 4$

Υποθετω οτι εχω $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ με

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

$c_1 (x^2 - x + 3) + c_2 (2x^2 + x) + c_3 (2x - 4) = 0$

βαζω $x = 0$: $\quad 3c_1 - 4c_3 = 0$

βαζω $x = 1$: $\quad 3c_1 + 3c_2 - 2c_3 = 0$

βαζω $x = -1$: $\quad 5c_1 + c_2 - 6c_3 = 0$

Υπολογιζω οριζουσα

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 3 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

Αν $= 0$ τοτε μοναδικη λυση η μηδενικη και οι συναρτησεις γραμ. ανεξ.

Αν $\neq 0$ τοτε οι συναρτησεις γραμ. εξαρτ. και εκτος την μηδενικη εχουμε και αλλη λυση

Άσκηση φυλλάδιο (8-1)

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ πραγματική

$f(x_i)\neq 0 \quad i=1,\dots,n \quad x_i\neq x_j$

ΝΔΟ $\{\underbrace{x^{k-1}f(x)}_{f_k(x)},\ k=1,2,\dots,n-1\}$ γραμ. ανεξ.

$c_1 f_1(x)+\dots+c_n f_n(x)=0$ για $x>0$

Βάζω τιμές $x=x_1,\dots,x=x_n$ και λύνω το σύστημα

$$\begin{cases} c_1 f(x_1)+\dots+c_n x^{n-1} f(x_1)=0 & x=x_1\\ c_2 f(x_2)+\dots+c_n x_2^{n-1} f(x_2)=0 & x=x_2\\ \vdots & \vdots\\ c_n f(x_n)+\dots+c_n x_n^{n-1} f(x_n)=0 & x=x_n \end{cases}$$

$c_1+c_2x_1+\dots+c_nx_1^{n-1}=0$

$c_1+c_2x_2+\dots+c_nx_2^{n-1}=0$ (ορίζουσα αυτών)

$\vdots$

$c_1+c_2x_n+\dots+c_nx_n^{n-1}=0$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{i\neq j}(x_i-x_j)\neq 0$$

Άρα σύστημα μόνο μηδενική λύση άρα γραμ. ανεξ.